1020. Vector lattice ニ於ケル積分論 (I)

小笠原 藤次郎 (広島文理大)

vector lattice ノ表現論[1]カラ vector lattice ヲ値域トスル点函数ノ積分論ニツイテ述ベル. 既ニコノ方面ニハ Bochner[2] 及ビ泉氏[3] ノ立派ナ研究ガアルガ茲デハ表現論ヲ如何様ニ利用スルカニ重心ヲオキ積分論ソノモノニツイテアラユル場合ヲ論及スルヤウニハ努メナイ。従ッテコノ見地カラ記述シ易イ場合ニ限ッタ。主トシテ両氏ノトリアゲタ例題ヲ中心議題トシテ理論ノ展開ヲ行フコトニスル。

(1) 全国紙上数学談話会 998, 999 参照, コレ等ニ於ケル記法ノ定義等断リナシニ用フル。

(2) Proc. Nat. Acad. Sci. 1940.

(3) 全国紙上数学談話会 978.

(1) 相對一様連續函數ノ積分論

§1 定義

X ヲ σ-complete vector lattice, 基本區間 $a \leqq t \leqq b$ 上ノ X ヲ値域トスル函數ヲ $x(t)$, $y(t)$ 等デ表ス. 普通ノ連續函數ノモツ性質ノ一ツ"一様連續性"ヲトリアゲテ (Kantorovitch ニヨル)

定義 アル $0 < e \in X$ ニ對シ ($x(t)$ ニ依存スルガ) 任意ニ正數 ε ヲ與ヘルトキ正數 δ ガ定マッテ $|t-t'| < \delta$ ノトキ常ニ $|x(t)-x(t')| < \varepsilon e$ ガ成立スルトキ $x(t)$ ハ e ニ關シテ一様連續或ハ單ニ相對一様連續ナリトイフ。

$x(t)$ ガ e ニ關シテ一様連續ノトキ $e' \geqq e$ ナル e' ヲトレバ e' ニ關シテ一様連續デアル又 (0) - 有界デモアルカラ以下ニ於テハ $|x(t)| \leqq e$ ガ成立スルモノトシテ論ズル. Lipschitz 條件 (Lipschitz 常數ハ X ノ要素) ヲ滿足スル函數ハ明ニ相對一様連續デアル. 今相對一様連續函數ノ全体ヲ $\mathcal{L}$ トスレバ次ノ定理ノ意味及ビソノ成立ハ殆ンド自明デアル。

定理 1.1. $\mathcal{L}$ ハ vector lattice ヲ作ル. $\alpha(t)$ ヲ任意ノ実連續函數, $x(t) \in \mathcal{L}$ トスレバ $\alpha(t)x(t) \in \mathcal{L}$ ガ成立スル.

(證) 略.

サテ $x(t)$ ヲ e ニ關シテ一様連續トシ基本區間ノ分割 Δ $a = t_0 < t_1 < \cdots\cdots < t_n = b$ ニ對シ Riemann 和 S_Δ ヲ作ル. 茲ニ $S_\Delta = \sum_0^{n-1} (t_{k+1} - t_k) x(\tau_k)$; $t_k \leqq \tau_k \leqq t_{k+1}$

實函數ノ場合ト全ク同様ノ過程ニヨッテ分割ノ norm ガ 0 ニ収斂スルトキ S_Δ ハ一定要素ニ e ニ関シテ相對一様收斂スルコトが証明出来ル。

コノ極限値ヲ $x(t)$ ノ $[a, b]$ 上ニ於ケル積分トイヒ

$$\int_a^b x(t)\,dt$$

デ表ハス。

今表現論トノ関係ヲ見ル*メニ e ヲ生成要素トスル主 ideal $\mathfrak{a}(e)$ ヲ考ヘ此ヲ e ガ恒等的ニ 1 トナル様表現 Boole 空間（σ-complete Boolean algebra ニ對應スル）ノ連續函數ノ vector lattice ニ表現スル. $x \in \mathfrak{a}(e)$ ニ對應スル函數ヲ $f_x(\mathfrak{p}^*)$ ト書イタガ茲デハ簡單ノタメ $x(\mathfrak{p}^*)$ ト書クコトニスル. コノトキ次ノ等式ガ成立スルコトハ積分ノ定義カラ自明デアル。

$$\int_a^b x(t)\,dt_{(\mathfrak{p}^*)} = \int_a^b x(t)_{(\mathfrak{p}^*)}\,dt,$$

$$\int_a^b \alpha(t)x(t)\,dt_{(\mathfrak{p}^*)} = \int_a^b \alpha(t)x(t)_{(\mathfrak{p}^*)}\,dt.$$

茲ニ $\alpha(t)$ ハ實數値連續函數デアル. コレニ依ッテ理論ハ實數値函數ノ場合ニ歸スルコトが可能トナル。

§2. Fourier 級數論

基本區間ヲ $[0, 2\pi]$ トシ $x(t) \in \mathcal{L}$ ニ對シ Fourier 係數, Fourier 級數ヲ普通ノ場合ノヤウニ定義スル.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\,dt,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos nt.\,x(t)\,dt,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin nt.\,x(t)\,dt\qquad n=1,2,3\cdots\cdots$$

$$x(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nt+b_n\sin nt$$

$a_n, b_n\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$ ハ(o)一有界 従ツテ§1及ビ表現論，実函数ノ場合ノ Riemann-Lebesgue ノ定理ヲ使ツテ

<u>定理2,1</u>　$n\to\infty$ ノトキ $a_n\to 0\ (o)$, $b_n\to 0(o)$

従ツテ Riemann-Lebesgue ノ定理ニ基礎ヲオク殆ンドノ定理が成立スル。例ヘバ $a_n=b_n=0$, $a_0=0$ ノトキ $x(t)\equiv 0$.

<u>定理2,2</u>. X が単位ヲモチ $x^2(t)$ が存在シ $x(t)$ ト共ニ $x^2(t)\in\mathcal{L}$ ノトキ a_n^2, b_n^2, a_0^2 が存在シテ

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2(t)\,dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum(a_n^2+b_n^2)$$

定理2,2ニ於テハ $x^2(t)\in\mathcal{L}$ ヲ假定シタが Parseval ノ関係ヲ単ニ手段トシテ必要トスル場合ハ X ニ単位ノ存在ヲモ假定スル必要ハナイ．§1ノ終リニ説明シタヤウニ e ヲ単位トスレバ $x^2(t)$ ハ常ニ存在シテ $x^2(t)\in\mathcal{L}$ が成立スル．従ツテ Zygmund ノ本ノ証明法ニヨツテ $x(0)=x(2\pi)$ ノトキ．

<u>定理2.3</u>. $x(t)\in Lip\ \alpha,\ (\alpha>\frac{1}{2})$ ノトキ $\sum|a_n|+|b_n|$ ハ収斂スル。

定理2.4. $x(t) \in Lip\ \alpha\ (\alpha > 0)$; $x(t) \in BV$ ノトキ $\sum |a_n| + |b_n|$ ハ收斂スル。

(注) $x(t) \in \mathcal{L}$ ノトキ $\left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum (a_n^2 + b_n^2) \right\}^{\frac{1}{2}}$ ハ X ニ單位ノ在, 非在ノ如何ニ拘ラズ單独的ニ定義スルコトガ出来ル。何者、一般ニ $x_K, (K = 1, 2, \cdots\cdots, n) \in X$ ヲ任意ニトルトキ $\bigvee_{\sum c_K^2 = 1} \{\sum c_K x_K\}$ デ表サレル要素ハ常ニ存在シ, モシ X ニ單位ガ存在シ x_K^2 ガ定義サレ得ルトキハ $\{\sum x_K^2\}^{\frac{1}{2}}$ ヲ表ス。從ツテ上ノ要素ニヨツテ $\{\sum x_K^2\}^{\frac{1}{2}}$ ヲ定義スルコトゝスル。§1ノ終リノ e ヲ單位トスルトキ Parseval ノ関係式ノ成立スルコトカラ常ニ

$$\bigvee_n \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n (a_K^2 + b_K^2) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ガ存在スル。コレヲ $\left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum (a_K^2 + b_K^2) \right\}^{\frac{1}{2}}$ ト書クコトニスル。又一方ニ於テ Riemann 和ノ代リニ $\{\sum (t_{K+1} - t_K) x^2(\tau_K)\}^{\frac{1}{2}}$ ヲ考ヘ分割ノ norm ガ 0 ニ収斂スルトキ (o)－收斂スル極限ヲ $\left[\int_0^\pi x^2(t)\,dt\right]^{\frac{1}{2}}$ ト書クトキ

$$\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2(t)\,dt\right]^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum (a_n^2 + b_n^2) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ノ成立ガ分ル。此ノ考ヘ方ニ從フトキ任意ノ Ω ニツイテ Fourier 係数ノ関係式ヲ vector 値函数ノ場合ニ翻訳スルコトガ出来ル。

§3. 概週期函数

$X + iX$ ($x + iy$ ノ全体) ヲ値域トスル函数 $x(t)$,

$-\infty < t < +\infty$ ヲ考ヘル．茲ニ $|x+iy| = \{x^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}$ ヲ表ス．

<u>定義</u>　アル正要素 e ($x(t)$ ニ依存スル) ガ存在シ e ニ関シテ一様連続ナ函数 $x(t)$ ガ次ノ條件ヲ満足スルトキ概週期函数ナリトイフ．即チ $\{h_i\}$ ヲ任意ノ実数列トスルトキ部分列 $\{h_{n_i}\}$ ガ存在シテ $\{x(t+h_{n_i})\}$ ガ e ニ関シテ相對一様收斂列ヲ作ル．

(注) 抽象群上ノ場合ト関聯シテ上ノ定義ノ形ヲトッタガ轉移數ニヨッテ定義シテモヨイ．

コノ場合モ §1 ニ説明シタ方法デ数値函数ノ場合ニ帰スコトガ出来次ノ定理ガ成立スル．

<u>定理3.1.</u>　Fourier 指數ガ一次的独立ナ Fourier 級數ハ一様收斂スル．

(註)　例ヘバ Bohr ノ本．

Fourier 係數ガ正ノトキ係數ノ和ガ收斂スルトイフ定理モナリタツ．

(II)　Vector lattice ニ於ケル Bochner ノ積分

§4.　<u>Bochner ノ定義</u>

X ヲ K_σ 型 regular vector lattice, $[a, b]$ ヲ基本区間トスル、先ヅ Bochner ノ與ヘタ定義ヲ思ヒ出ス．

<u>定義</u>．$|x_n(t) - x(t)| \leqq a_n$, $a_n \downarrow 0$ ナル a_n ガ存在スルトキ $x_n(t)$ ハ $x(t)$ ニ一様收斂スル．

定義. $\varepsilon>0$ ヲ任意ノ正数トスル. 高々測度 ε ノ集合ヲ除イテ $x_n(t)$ ガ $x(t)$ ニ一様収斂スルトキ $x_n(t)$ ハ $x(t)$ ニ測度収斂スルトイフ。

定義. $[a, b]$ ガ互ニ共通点ノナイ有限個ノ可測集合 E_K ニ分レソノ各々ノ上デノ常数要素ヲトル函数ヲ単函数トイフ. E_K 上デ a_K ナル値ヲトル単函数 $s(t)$ ノ積分ヲ $\sum|E_K|a_K$ デ定メル、コレヲ $\int_a^b s(t)\,dt$ トカク。

定義. $x(t)$ ガコレニ測度収斂スル単函数列ヲモツトキ可測トイヒ，コノ単函数列ヲ可測（定義）列トイフ。

定義. 可測函数 $x(t)$ ノ可測定義列 $s_n(t)$ ガ $m, n\to\infty$ ノトキ

$\int_a |s_n(t)-s_m(t)|\,dt\to 0$ ノトキ $x(t)$ ハ可積分, $s_n(t)$ ヲ積分定義列ト云フ。

定理4.1. $x(t)$ ガ可積分ノトキ積分定義列ノ如何ニカヽハラズ $\int_a^b s_n(t)\,dt$ ハ同一ノ極限値ヲモツ。

(証) 可積分函数ノ linearity カラ $x(t)=0$ ノ場合ニ証明スレバヨイ。表現論ニヨリ表現空間ノ連続函数デ表現スルナラバ容易ニ確メルコトヲ得ル、即チ $s_n(t)$ ヲ 0 ノ積分定義列トスレバ $s_n(t)_{(\mathfrak{z}^*)}$ ハ $n\to\infty$ ノトキ測度 0 ノ集合ヲ除イタ t ノ値ニ対シ第一種集合ヲ除イタ表現空間ノ点集合 Ω' ガ存在シ $\mathfrak{z}^*\in\Omega'$ ノトキ $s_n(t)_{(\mathfrak{z}^*)}\to 0$, マタ $\mathfrak{z}^*\in\Omega'$ ノトキ $\int|s_n(t)_{(\mathfrak{z}^*)}-s_m(t)_{(\mathfrak{z}^*)}|\,dt\to 0$ $(m, n\to+\infty)$ トシテヨイカラ $\mathfrak{z}^*\in\Omega'$ ノトキ $\int_a^b s_n(t)_{(\mathfrak{z}^*)}\,dt\to 0$. 且ツ $\int_a^b s_n(t)\,dt$ ハ (o)-収斂スルカラコノ極限値

ハ0デアル。

此ノ定理カラ次ノ定義ハ意味ヲモツコトニナル。

定義. $x(t)$ヲ可積分トスルトキ$x(t)$ノ積分定義列$s_n(t)$ニ對シ$x(t)$ノ$[a, b]$上ノ積分ヲ

$$\int_a^b x(t)dt = (o)\text{-}\lim \int_a^b s_n(t)dt$$

ト定メル。

定理4.2. 可積分函数ニヨッテmajorizeサレル可測函數ハ可積分從ッテ(0)－有界ナ可測函數ハ可積分デアル。

(証) 定理4.1ト同論法.

可積分函數$x(t)$ニ對シテハ普通トラレル方法ニ從ッテ$\int_E x(t)dt$ヲ定義スルコトガ出来ル、コレニツイテハ

定理4.3. 可積分函數$x(t)$ニ對シ$F(E)=\int_E x(t)dt$トオクトキ$F(E)$ハ(0)－有界, (0)－完全加法的, (0)－全連續デアル。

(証) 定理4.2ノ証明ノ注意ト同ジ。

Bochnerハ逆ニ(0)－全連續, 加法的集合函數ト不定積分トノ關係ニツイテ述ベテヰルガ彼ノ積分定義ガコノ要求ニ應ズルヤ否ヤハ私ニハ分ラナイ。此ノ問題ハ後デ論ズルコトニスル。彼ハ尚ニ三ノ可測函數, 可積分函數ニ關スル性質ヲ述ベテヰルガ以上ノ外ニ次ノ諸定理ガ成立スル。

定理4.4. 可測函數, 可積分函數ハ夫々vector latticeヲ作リ實數値可測函數ト可測函數ノ積ハ可測, 實數値有界可測函數ト可積分函數トノ積ハ可積分デアル。

定理4.5. Xニ単位ガ存在シ $x(t)$ ハ可測, $x^2(t)$ ガ可積分ノトキ $x(t)$ モ可積分デアル。

§5. Fourier 級數論

X ヲ regular, $[0, 2\pi]$ ヲ基本區間トシテ可積分函數 $x(t)$ ヲ考ヘル. 定理4.4. ニヨッテ §2ト同様ニシテ Fourier 係数及ビ Fourier 級数ヲ定義スルコトが出来ル. コレニツイテ§4ニ使用シタ表現論ノ方法ニヨッテ Riemann-Lebesgue ノ定理, 又定理4.5. ヲ使ッテ Parseval ノ関係式ガ成立スル. 斯クノ如クシテ vector 値点函數ノ理論ニ実数値函数ノ理論ノ飜訳トシテ成立スル面ノ存在ガ分ッタワケデアル。

Bochner ノ理論ハ可測函數ノ定義ガ狭ク, 従ッテソレニ原因スル不便モ起リ得ルカラ, 次ニ稍一般ナ定義ニツイテ述ベル。

(III) Vector lattice ニ於ケル可測函數ノ積分論

§6. 可積分函數

X ヲ次ノ條件ヲ満足スル σ-complete vector lattice トスル。

(α): $a \in X$ ヲ任意ノ正要素トスルトキ a ニ正値ヲ與ヘル (o)-連續正線型汎函數ガ存在スル。

コノ條件ハアトデ分ルヤウニ積分ノ定義ヲ單独ナラシメルタメ導入シタ充分條件デアッテ通例ノ Banach lattice ((o)-収斂ガ (ℓ)-収斂ヲ伴フ σ-complete vector lattice

ヲナス）デハ常ニ満足サレルモノデアル。

定義．基本区間 $[a, b]$ 上ノ単函数及ビソノ積分ノ定義ハ§4ノモノト同ジ。

定義．殆ンドスベテノ点デ単函数列ノ (o)－収斂極限トシテ表サレル函数ヲ可測函数，単函数列ヲコノ可測函数ノ可測定義列トイフ。

定義．可測函数 $x(t)$ ノ可測定義列 $\{s_n(t)\}$ ヲ次ノ如クトリ得ルトキ可積分，$\{s_n(t)\}$ ヲ積分定義列トイフ。

$n, m \longrightarrow \infty$ ノトキ

$$\int_a^b |s_n(t) - s_m(t)|\, dt \longrightarrow 0 \quad (o)$$

定理 6.1. $x(t)$ ヲ可積分函数トスルトキ積分定義列 $\{s_n(t)\}$ ノ如何ニカヽハラズ $\int_a^b s_n(t)\,dt$ ハ同一ノ (o)－収斂ノ極限ヲモツ。

(証) 可積分函数ノ linearity カラ $x(t) \equiv 0$ 且ツ $s_n(t) \geqq 0$ ノ場合ヲ証明スレバヨイ。$f(x)$ ヲ (o)－連續正線型汎函数トスルト f ((o)－$\lim \int s_n(t)\,dt) = \lim f(\int s_n(t)\,dt) = \lim \int f(s_n(t))\,dt$．コレガ0トナルコトハ $f(s_n(t))$ ガ殆ンドスベテノ点デ0ニ収斂スルコト及ビ $m, n \rightarrow \infty$ ノトキ $\int |f(s_n) - f(s_m)|\,dt \rightarrow 0$ ナルコトカラ分ル．故ニ條件 (ω) カラ (o)－$\lim \int s_n(t)\,dt = 0$

従ッテ次ノ定義カラ可積分函数ノ積分ガ単独的ニ定マルコトヲ知ル。

定義．$x(t)$ ヲ可積分函数，$\{s_n(t)\}$ ヲソノ積分定義

列トスレバ $x(t)$ ノ積分ヲ $\int_a^b x(t)\,dt$ ト書キ次ノ如ク定義スル。

$$\int_a^b x(t)\,dt = (o)\text{-}\lim_n \int_a^b s_n(t)\,dt$$

定理 6.2. 可測函数, 可積分函数ハ夫々 vector lattice ヲ作ル. 実数可測函数ト可測函数ノ積ハ可測, 有界ナ実数値可測函数ト可積分函数ノ積ハ可積分デアル。

(証) 自明.

次ニ表現論ヲ使ツトキ可測函数トソノ積分ノ表現函数ノ間ニ如何ナル関係ガアルカヲ明ニスル。

簡単ノタメ可積分函数 $x(t) \geqq 0$, ソノ積分定義列 $s_n(t) \geqq 0$ ヲ考ヘル。

X ノ主 ideal ノ作ル σ-complete Boolean algebra ノ表現 Boole 空間ヲ Ω ソノ点ハ一般ニ $\mathfrak{p}^*$ デ表ス. Ω ノ basic open set ヲ含ム最小ノ Borel field ヲ考ヘル. $f(x)$ ヲ任意ノ (o)-連続正線型汎函数トスルトキ $f(x)$ ニヨツテ導入サレル完全加法的測度ヲ $\mu(E)$ トスル. 今 $\overline{\varphi}(t, \mathfrak{p}^*) = \overline{\lim_n}\, s_n(t)_{(\mathfrak{p}^*)}$, $\underline{\varphi}(t, \mathfrak{p}^*) = \underline{\lim_n}\, s_n(t)_{(\mathfrak{p}^*)}$ トオクトキ殆ンドスベテノ t ニ対シ $\overline{\varphi}(t, \mathfrak{p}^*)$ ハ $x(t)_{(\mathfrak{p}^*)}$ ト第一種ノ集合ヲ除イテ一致スル. 故ニ

$$\int_\Omega \overline{\varphi}(t, \mathfrak{p}^*)\,\mu(d\varepsilon) = f(x(t))$$

従ツテ

$$\int_\Omega \mu(dF)\int_a^b \overline{\varphi}(t,\mathfrak{z}^*)\,dt=\int_a^b dt\int_\Omega \overline{\varphi}(t,\mathfrak{z}^*)\,dt=\int_a^b f(x(t))\,dt$$

$\underline{\varphi}(t,\mathfrak{z}^*)$ ニ對スル同様ノ式カラ

$$\int_a^b \overline{\varphi}(t,\mathfrak{z}^*)\,dt\neq\int_a^b \underline{\varphi}(t,\mathfrak{z}^*)\,dt$$

ヲ満足スル $\mathfrak{z}^*$ ノ集合ハ條件(ﾑ)ノタメニ第一種集合ヲ作ル. 從ッテ第一種集合ヲ除イタ Ω' ノ上デ各々ノ $\mathfrak{z}^*\in\Omega'$ ニ対シ殆ンドスベテノ t ニツイテ ($\mathfrak{z}^*$ ニ依存スル) $\overline{\varphi}(t,\mathfrak{z}^*)=\underline{\varphi}(t,\mathfrak{z}^*)$.

以上ニヨリ,一般ノ場合可積分函数 $x(t)$ ニツイテ次ノコトガ分ル。第一種集合ヲ除イテ殆ンドスベテノ点 t デ ($\mathfrak{z}^*$ ニ依存スル). $s_n(t)_{(\mathfrak{z}^*)}$ ノ極限ガ存在 $m,n\to\infty$ ノトキ

$$\int_a^b |s_n(t)_{(\mathfrak{z}^*)}-s_m(t)_{(\mathfrak{z}^*)}|\,dt\to 0$$

且ツ

$$\int_a^b x(t)\,dt_{(\mathfrak{z}^*)}=\lim\int_a^b s_n(t)_{(\mathfrak{z}^*)}\,dt=\int_a^b \lim s_n(t)_{(\mathfrak{z}^*)}\,dt$$

ナル関係ガ成立スル. コレヲ使ッテ次ノ諸定理ガ証明出来ル。

<u>定理6.3.</u> 可積分函数ニヨッテ majorize サレル可測函数ハ可積分. 從ッテ (0)－有界可測函数ハ可積分デアル,

<u>定理6.3.</u> 可積分函数 $x(t)$ ガ殆ンドスベテノ点ニ於テ可積分函数列 $x_n(t)$ ノ (0)－收斂極限トシテ表サレ,

且ツ $x_n(t)$, $x(t)$ ヲ majorize スル可積分函数が存在スルトキ

$$\int_a^b x(t)\,dt = (0)\text{-}\lim_n \int_a^b x_n(t)\,dt$$

定理6.5. 可積分函数 $x(t)$ ニ對シ通例方法デ定義サレル $\int_E x(t)\,dt$ ヲ $F(E)$ ト置クトキ $F(E)$ ハ (0)－有界，(0)－完全加法的，(0)－全連續（$|E_n| \to 0$ ノトキ $F(E_n) \to 0\,(0)$ ノ意デアル。

定理6.6. Xが單位ヲモツトキ $x(t)$ が可測，$x^2(t)$ が可積分ノトキ $x(t)$ モ可積分ナリ。

定理6.2ヨリ基本區間トシテ $[0, 2\pi]$ ヲトルトキ可積分函數ニ對シ Fourier 級數，Fourier 係數が定義サレ Riemann-Lebesgue ノ定理が成立スル。特ニ

定理6.7. 定理6.6ノ假定が成立ツトキ Parseval ノ關係式が成立スル。

以上ニ於テハ積分ノ定義ヲ Parseval ノ關係式が成立スルヤウ且ツ可積分函數ノ不定積分 $F(E)$ が (0)－有界，(0)－完全加法的，(0)－全連續（X が regular ノトキ (0)－全連續ハ Bochner ノ定義ト一致スル）函數トナルヤウニ構成シテ見タ。

Hellinger 型積分ニツイテハ別ノ題目デノベルが定理6.5ノ假定ノモトニ於テハ

$$\int_a^b \frac{F^2(dE)}{|dE|} = \int_a^b x^2(t)\,dt$$

が成立スルコトヲ注意スル。

§7. Xヲ Banach lattice トスルトキ

σ-complete vector lattice Xヲ $x_n \downarrow 0$ ノトキ $\|x_n\| \to 0$ ヲ満足スル Banach lattice トスル(t)-収斂ト(b)-収斂ハ對等). norm ノツイテヰルタメノ空間ノ一様性カラ §6ノ可測ト Bochner (Fundamenta 2c) ノ可測トハ對等ナルコト從ッテ§6ノ定義ヲ(0)ノ代リニ(t)トシテモヨイコト，可測函数列ノ(0)-収斂極限が可測ナルコト等が分ル。積分ニツイテハ彼ノ可積分函数ニハ§6ノ積分定義列ヲ作ルコトモ可能デアルカラ§6ノ意味デ可積分トナル。

以下デハ集合函数ト不定積分ノ関係，Jessen ノ定理ニツイテ述ベテミタイ。